

Je construis des  
**SYSTÈMES** de  
NUMÉRATION

*par*

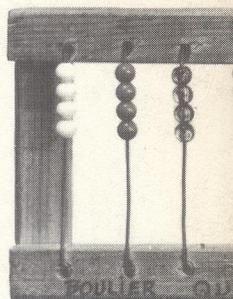
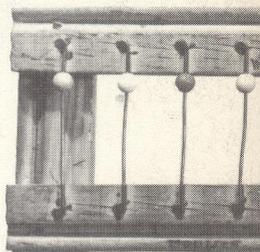
R. Boucherie

E. Lèmery

L. et J. Perret

Thérèse Michaut

J.-P. Monier



Loi n° 49-956 du 16 Juillet 1949  
sur les publications destinées à la jeunesse  
La directrice de la publication : E. Freinet

Membres du comité : E. Freinet - M.-E. Bertrand  
M. Menusan - R. Poitrenaud

© Institut Coopératif de l'École Moderne

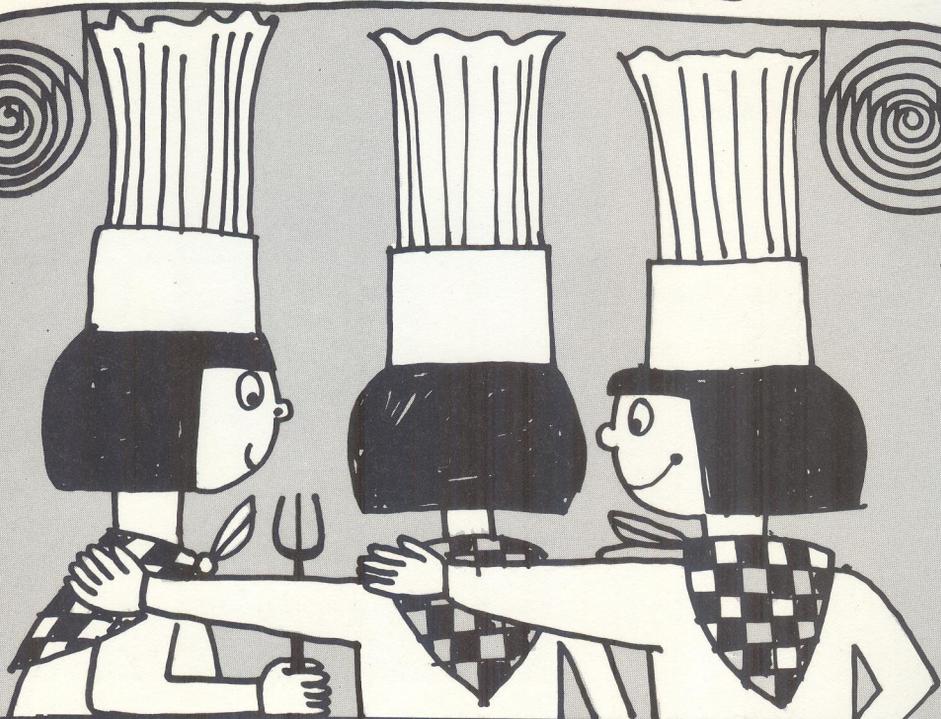
Printed in France by Imprimerie CEL - Cannes

Dépôt légal : 4<sup>e</sup> trimestre 1969

n° d'édition 192 - n° d'impression 1368

Prix du numéro simple 1,50 F

# LES BANDES ENSEIGNANTES PROGRAMMÉES



## DE TRAVAUX PRATIQUES

1<sup>re</sup> et 2<sup>me</sup> séries : Je sais faire .....

- Ces bandes, destinées aux élèves des petites classes, doivent permettre à ces enfants une grande expérimentation.
- Elles ont été conçues :  
Comme des témoignages de moments vécus dans les classes  
Comme des idées de réalisations possibles.
- Elles ne demandent qu'un matériel simple, que l'on peut facilement se procurer.
- Elles apportent le plaisir de manger ensemble ce qu'on a réalisé.

1<sup>re</sup> série : 1 à 10 = Recettes diverses  
11 à 20 = Pâtisserie.

Tous renseignements à : C.E.L. BP 282 CANNES 06



supplément à la bibliothèque de travail

# Je construis des SYSTÈMES de NUMÉRATION

par

R. Boucherie  
E. Lèmery  
L. et J. Perret

Thérèse Michaut  
J.-P. Monier  
et la commission I.C.E.M.

---

## SOMMAIRE

<b>Les bouliers</b>	
Recherches	2 à 6
Réponses	7
<b>Codage pour des mesures</b>	
Recherches	9 à 13
Réponses	14
<b>Un curieux système : « Trou, trac, trec... »</b>	
Recherches	15 à 19
Réponses	19-20
<b>Faisons un bilan</b>	21 à 24

●

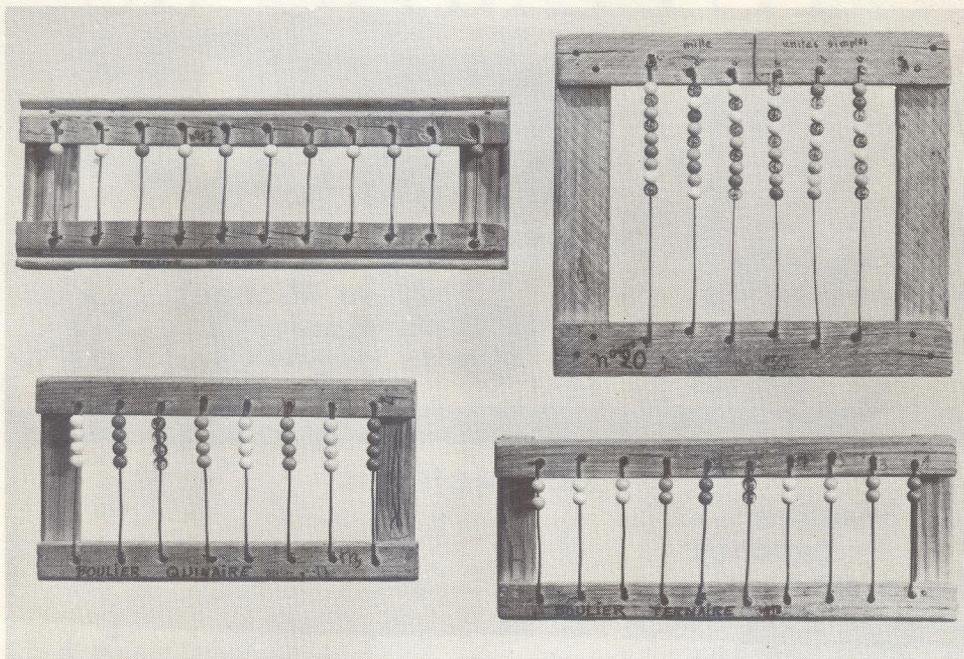
**Ce livret propose une recherche guidée sur 3 situations vécues par des enfants, introduisant divers systèmes de numération. Il est autocorrectif...**

●

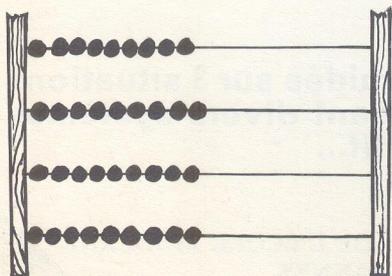
# Les bouliers

C'est une des plus anciennes « machines à compter ». On en trouve parfois dans les écoles où l'on s'en servait pour apprendre à compter aux petits enfants et dans les cafés où ils sont utilisés par les joueurs de billard. Ils sont encore utilisés en Russie et en Extrême-Orient.

Ce boulier, que tu peux découvrir, comporte 9 boules sur chaque fil, le zéro n'est pas représenté (on ne met rien).

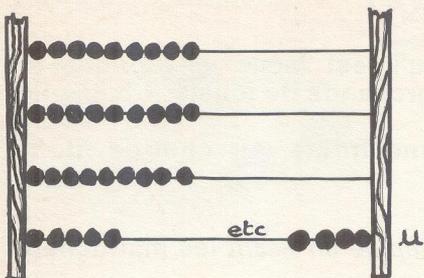


## Comment l'utilise-t-on ?



Convenons de compter toujours les boules poussées à droite.

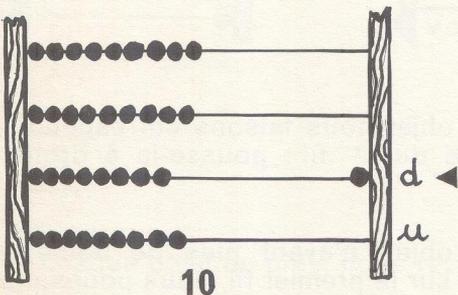
Le boulier ci-contre indique zéro



### Pour compter dix

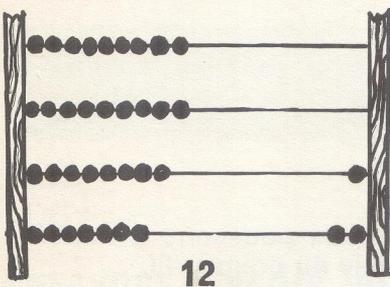
● *Sur le 1<sup>er</sup> fil : (en bas)*  
 Nous poussons les neuf boules à droite une par une (ce sont les unités) :

Un, deux, trois, quatre... neuf.



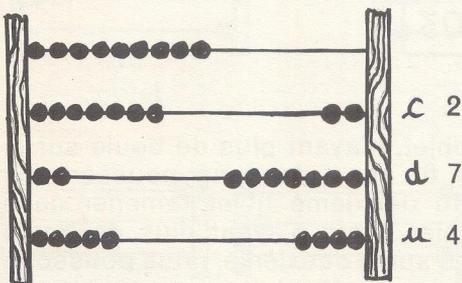
● *Sur le 2<sup>e</sup> fil :*  
 Nous poussons une boule à droite en comptant le dixième objet et nous ramenons les neuf boules du premier fil à gauche (0 unité).

Cela fait 1 dizaine et 0 unité.  
 Le 2<sup>e</sup> fil indique ainsi les groupes de dix ou dizaines.



### Pour compter douze

Après dix, nous poussons à droite de nouveau 2 boules sur le 1<sup>er</sup> fil : onze, douze.



Nous pouvons écrire le nombre de boules situées à droite sur chaque fil avec les chiffres (symboles) connus.

Le boulier indique maintenant le nombre 274.

As-tu remarqué que :  
 le 1<sup>er</sup> fil indique *les unités*,  
 le 2<sup>e</sup> fil indique *les dizaines*,  
 le 3<sup>e</sup> fil indique *les centaines*.

## Autres bouliers

Tu peux voir, sur la photo (page 2), qu'il est facile de fabriquer un boulier : des perles achetées chez les marchands de jouets, 4 baguettes de bois et du fil de fer...

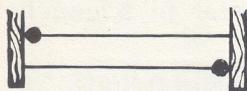
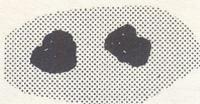
**Construis un boulier qui n'aura qu'une boule sur chaque fil.**

### Essayons de compter

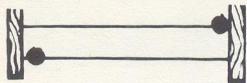
Avec le boulier que tu as construit, *manipule en lisant* les instructions.

Si tu as deux objets à compter

01



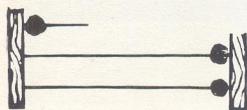
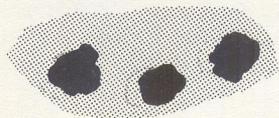
Au 1<sup>er</sup> objet nous faisons correspondre la boule du 1<sup>er</sup> fil : pousse-la à droite.



Au 2<sup>e</sup> objet, n'ayant plus de boule à gauche sur le premier fil, nous poussons la boule du 2<sup>e</sup> fil et nous ramenons à gauche celle du premier.

Continuons avec trois objets

02

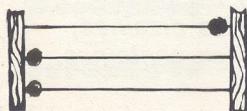


Au 3<sup>e</sup> objet nous poussons à nouveau à droite la boule du premier fil.

Tu peux continuer *seul* sans lire les instructions suivantes.

Essayons avec quatre objets

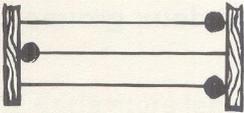
03



Au 4<sup>e</sup> objet, n'ayant plus de boule sur le premier fil nous devrions pousser une boule du deuxième fil et ramener celle du premier, mais n'ayant plus de boule à gauche sur le deuxième, nous poussons une boule du 3<sup>e</sup> et nous ramenons à gauche celles du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>e</sup>.

Avec cinq objets

04



Au 5<sup>e</sup> objet nous poussons de nouveau à droite une boule du premier fil.

◀ Voici 5

05

### Résumons...

A chaque objet de plus, nous revenons au premier fil d'abord : celui des unités.

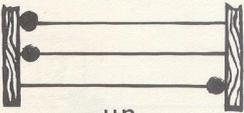
Si la boule est déjà poussée à droite sur un fil quelconque nous passons au fil supérieur à condition de ramener à gauche les boules des fils inférieurs (ce qui signifie pour eux 0).

Si tu n'es pas encore assez sûr, recommence cette manipulation.

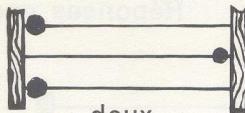
06

### Essays d'écrire les nombres

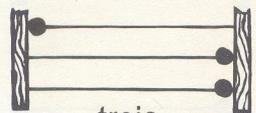
Récapitulons...



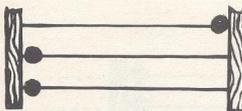
un  
objet



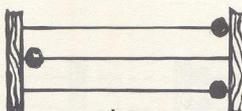
deux  
objets



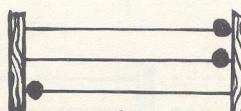
trois  
objets



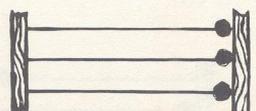
quatre  
objets



cinq  
objets



six  
objets



sept  
objets

Sur ce boulier

- Une boule du 1<sup>er</sup> fil
- Une boule du 2<sup>e</sup> fil
- Une boule du 3<sup>e</sup> fil
- Une boule du 4<sup>e</sup> fil

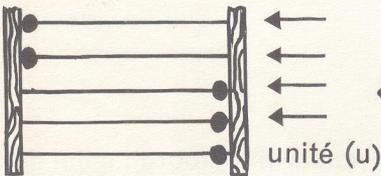
indique toujours les unités (*u*). Ce sont les objets non groupés.

n'indique plus les dizaines mais un **groupe de deux unités** (ou deux objets) appelé **paire**.

Indique un **groupe de deux paires**.

indique un **paquet de deux groupes**.

08



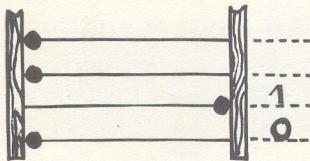
Nous pouvons noter ces indications sur le schéma du boulier.

◀ Complète.

As-tu une remarque à faire sur ce mode de **groupement** ?

Réponse page 8

09



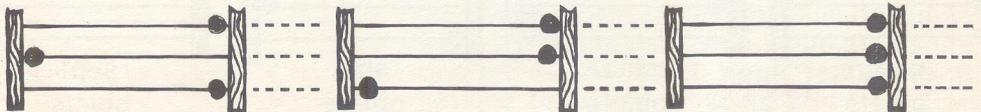
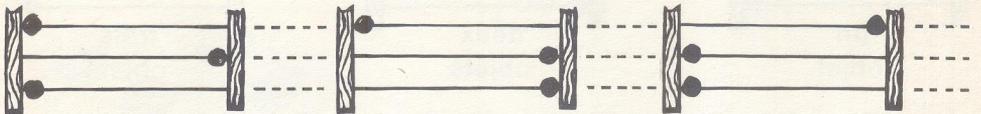
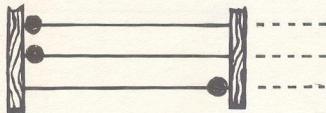
◀ En reprenant les manipulations de la première partie (pages 4 et 5) ou les dessins seulement (page 5-6) indique, avec des symboles connus, les chiffres en face de chaque fil.

Combien

d'unités,  
de paires,  
de groupes,  
de paquets

..... sont représentés par les boules sur chaque fil.

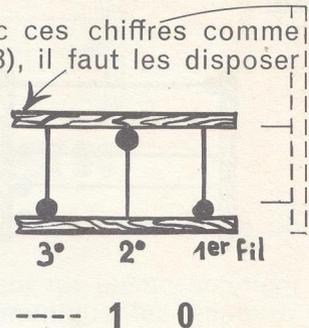
Réponses page 8



10

Si nous voulons écrire les *nombres* formés avec ces chiffres comme nous l'avons fait avec le premier boulier (page 3), il faut les disposer horizontalement.

Tu peux aussi, sur la table, mettre le boulier dans l'autre sens.



- Ecris alors les nombres pour chaque cas (09 - page 6) avec ce système.
  - Tu peux aussi écrire au-dessous de chacun les nombres correspondants avec lesquels nous comptons habituellement.
- Réponses page 8

11

## Test

### 1<sup>re</sup> partie

Sur ton boulier à une boule par fil, place celles-ci correctement pour indiquer les nombres

1 0 1 1  
1 0 0 1

Attention ces nombres s'épellent : un, zéro, un, un  
et un, zéro, zéro, un

### 2<sup>e</sup> partie

En utilisant ton boulier, écris :

le nombre de doigts des deux mains,  
le nombre de jours du mois de décembre.

Tu viens de découvrir une autre manière d'écrire les nombres qui servent à compter. Qu'en penses-tu?...

12

- Nous pouvons aussi additionner des nombres écrits dans ce système, avec ou sans boulier.

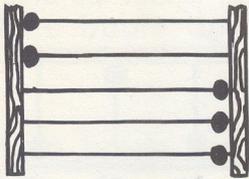
par exemple :

101	ou encore	101
+ 10		+ 101
-----		-----

Tu peux aussi construire d'autres bouliers où le groupement sera différent : deux boules par fil...

08

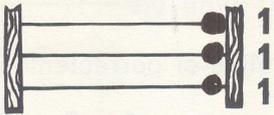
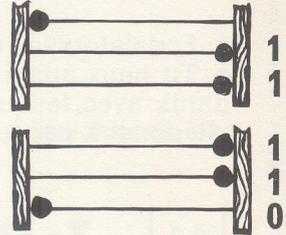
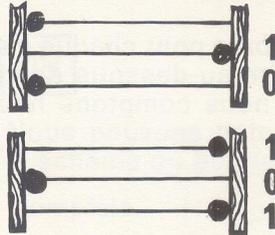
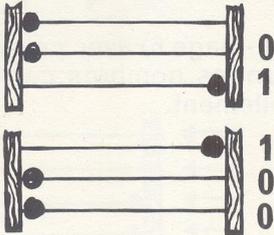
## Les bouliers Réponses



← paquets (deux groupes)  
 ← groupes (deux paires)  
 ← paires (deux unités)  
 ← unités

C'est un groupement par deux.

09



10

Nombre écrit avec les chiffres utilisés

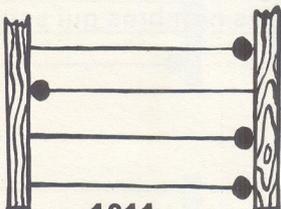
1      10      11      100      101      110      111

Nombre « habituels » correspondants

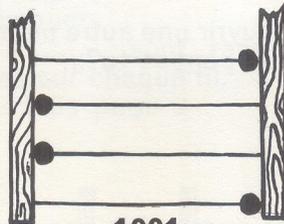
1      2      3      4      5      6      7

11

**Test**  
 1<sup>re</sup> partie



**1011**



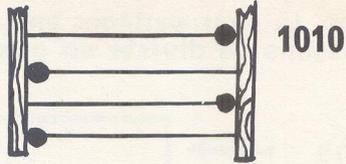
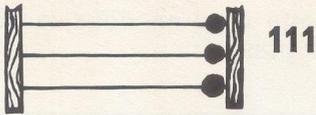
**1001**

2<sup>e</sup> partie

Nombre de doigts des deux mains : **1010**

Nombre de jours du mois de décembre : **11111**

12



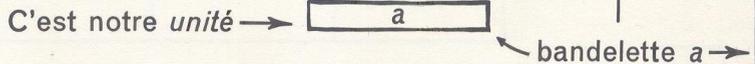
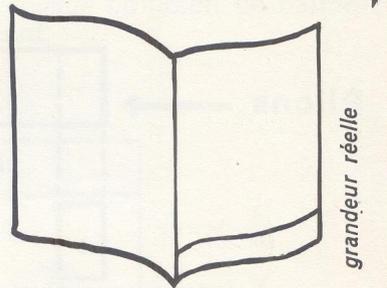
01

## Codage pour des mesures

Si nous voulons comparer divers segments de droite : une feuille de papier, une table, la largeur de la porte, etc. nous pouvons voir combien de fois ils contiennent un *même* segment que nous aurons tous choisi pour mieux nous communiquer les résultats.

**Choisissons** la largeur d'une couverture de cahier d'écolier qui est reproduite ici. ▶

- découpons une bandelette assez large
- désignons-la avec une lettre :  $a$
- inscrivons cette lettre sur la bandelette



02

### Faisons un essai

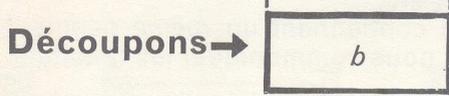
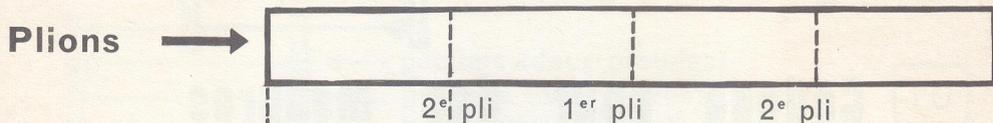
- Compare le segment de droite ( $m s$ ) dessiné le long de cette page (à gauche) à cette bandelette  $a$ .
- Tu constates qu'elle ne recouvre pas exactement ( $m s$ ). Nous ne pouvons pas dire exactement combien de fois ( $m s$ ) contient  $a$  (entre 1 et 2...)
- Si nous voulons « couvrir » exactement ce segment ( $m s$ ) pour atteindre son extrémité, il nous faut ajouter des bandelettes plus petites que nous devons construire.

03

### Comment construire d'autres bandelettes?...

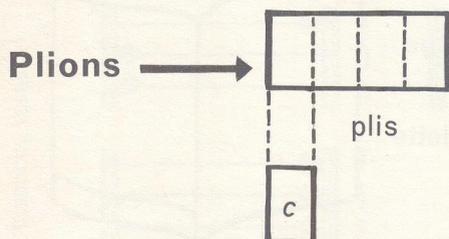
- Peut-être as-tu une idée... alors essaie-la et propose-la à ton professeur.

● Sinon, tu peux partager une bandelette « a » en deux, ou en quatre. Choisissons de **diviser en quatre** par pliage :



Nous désignons *b* cette nouvelle bandelette.

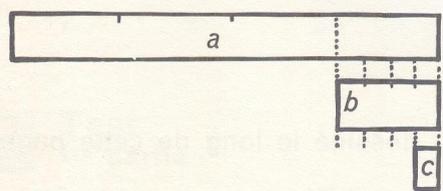
Si nous l'ajoutons à *a*... recouvrent-elles (*m s*) ?



Nous pouvons encore diviser *b* en quatre, nous obtenons *c*, etc...

Ainsi nous avons construit **un système d'unités**

**04 Récapitulons**



Cherche combien chaque bandelette vaut ou remplace de bandelettes plus petites.

$$a = \dots b = \dots \times \dots c$$

$$b = \dots c$$

Réponses page 14

Nous pouvons organiser un tableau des valeurs de nos unités.

bandelette <i>a</i>	bandelette <i>b</i>	bandelette <i>c</i>
<i>a</i> =		
ou	<i>b</i> =	
<i>a</i> =		

Attention il nous faudra peut-être } plusieurs unités *b*  
pour « couvrir » divers segments de droite. } plusieurs unités *c*

## Codage pour des segments

- Nous pouvons maintenant tenter de recouvrir exactement des segments de droite avec nos unités convenablement mises bout à bout.
- Essaie pour le segment ( $m s$ ), seul si tu le veux, ou en suivant ces instructions.
  - Si la bandelette  $a$  est trop grande nous prenons la bandelette  $b$ .
  - Si  $b$  n'est pas assez grande nous ajoutons 1  $c$ , ou 2  $c$ , ou 3  $c$ ...
- Tu peux alors relever dans un *tableau de codage* combien de bandelettes sont utilisées pour recouvrir le segment.

$m s$  →

$a$	$b$	$c$
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>3</b>

- Si nous choisissons  $c$  comme unité (la plus petite), le code pour ( $m s$ ) est alors **103**

Il indique un nombre d'unités  $c$ .

<b>1</b>	<b>0</b>	<b>3</b>
↑		↑
(1 × 4 × 4) $c$		3 $c$

soit dix-neuf bandelettes  $c$  dans notre système habituel.

- Ainsi nous n'emploierons jamais 4  $c$  puisque  $4 c = 1 b$ . Cela fait l'unité supérieure, donc nous n'écrirons jamais le chiffre **4** dans le code.

06

# Test

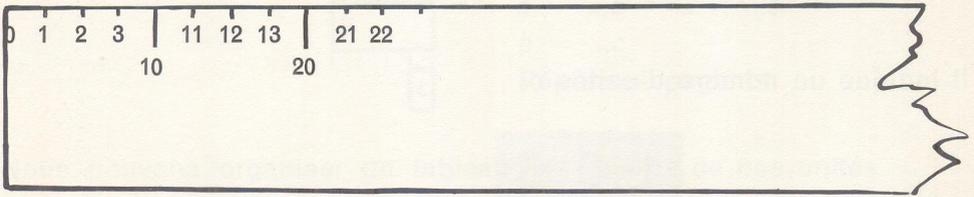
Si tu as compris ce codage, recherche, à l'aide d'un tableau, les *codes* pour les segments de la page suivante en choisissant toujours *c* comme unité.

segments	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	code
( <i>j f</i> )				→
( <i>t v</i> )				→
( <i>n r</i> )				→
( <i>l k</i> )				→
( <i>p h</i> )				→

Réponses page 14

07

Tu peux perfectionner le système en construisant une règle graduée avec ces unités.



Tu peux aussi construire un autre système d'unités en changeant la manière de diviser la première bandelette...

*j*  
*f*

*l*  
*k*

*p*  
*h*

*n*  
*r*

*t*  
*v*

## Codage

Réponses

04

bandelette <i>a</i>	bandelette <i>b</i>	bandelette <i>c</i>
$a = 4 b$ ou $a = 4 \times 4 c$	$b = 4 c$	

On peut écrire plus simplement

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
$(4 \times 4) c$ ou $4^2 c$	$4 c$	

## 06 Test (réponses)

segments	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	code
( <i>j f</i> )	1	1	1	→ 111
( <i>t v</i> )	1	0	2	→ 102
( <i>n r</i> )	0	1	0	→ 10
( <i>l k</i> )	0	2	3	→ 23
( <i>p h</i> )	0	3	3	→ 33

As-tu remarqué combien on groupe d'unités pour obtenir l'unité supérieure ?

Compare avec notre système métrique habituel.

# Un curieux système : «Trou, trac, trec...»

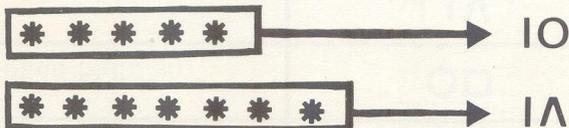
01

Les élèves d'une classe ont inventé des signes (chiffres) et des mots pour écrire les cardinaux d'ensembles. Les voici :

ensembles	chiffres	mots
	O	trou
■	I	trac
■ ■	Λ	trec
■ ■ ■	Δ	tric
■ ■ ■ ■	□	troc

02

Avec ces signes, ces élèves ont écrit les cardinaux suivants pour ces ensembles :



Dans ces écritures, que représente

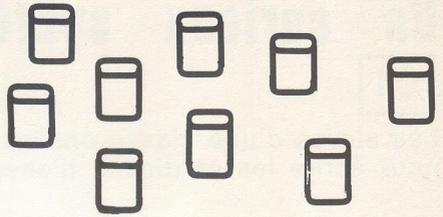
le signe I ?

le signe O ?

le signe Λ ?

pense aux bouliers pages 2 à 6.

03



Voici un ensemble de boîtes.  
En utilisant uniquement les chiffres et les mots inventés, à ton tour,

- essaie d'écrire le cardinal de cet ensemble avec les signes ;
- essaie d'écrire le cardinal de cet ensemble avec les mots.

Réponses page 19

04

Si tu as compris, il est facile d'écrire le cardinal de

- l'ensemble des notes de musique ;
- l'ensemble des doigts de tes deux mains.

.....

Réponses page 19

05

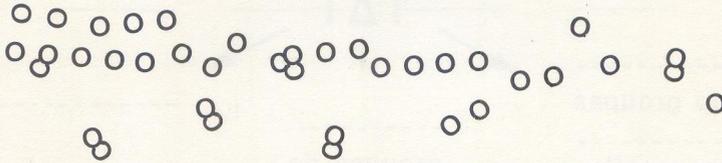
Inversement, voici les cardinaux de quelques ensembles de jetons :

ensembles	cardinaux	
A	Λ I	
B	□ O	
C	Δ □	
D	troc tric	
E	trec troc	

Dessine les éléments de chaque ensemble.  
Réponses page 19

06

Voici un ensemble de jetons **J**.



Fais des groupements selon le même mode que ces élèves en utilisant des crayons de différentes couleurs pour

- des groupes,
- les groupes de groupes, etc.

Tu peux alors écrire le cardinal en t'aidant d'un tableau :

groupes de groupes...	groupes de...	jetons seuls

Card (**J**) = ...

Réponses page 20

07

En utilisant un calendrier et le même mode de groupement, tu peux écrire le cardinal

- de l'ensemble des jours du mois de juin,
  - de l'ensemble des jours du mois de décembre,
- puis, avec un double-décimètre, celui de l'ensemble des centimètres sur la graduation.

Réponses page 20

08

Dans ce système curieux, le cardinal d'un ensemble est  
trac tric trac.



Tu peux chercher ce que signifie chaque signe selon sa place (complète sur le pointillé).  
Tu peux alors retrouver, par le calcul, le nombre d'éléments dans notre système habituel.

Réponses page 20

09

Tu as ici le début de la suite ordonnée des nombres écrits dans ce système, continue-la jusqu'à Δ○ par exemple.

- trou ○
- trac |
- trec ^
- tric Δ
- troc □
- trac trou |○
- trac trac | |
- .....
- .....

Réponse page 20

10

Tu peux maintenant essayer d'additionner des cardinaux ainsi écrits :

$$\begin{array}{r}
 + \text{I} \\
 \Lambda \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \text{I} \\
 \Delta \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \square \\
 \text{I} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \Lambda \\
 \Delta \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{I} \Lambda \\
 \Delta \text{O} \\
 \hline
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 \text{I} \Lambda \\
 \text{I} \Delta \\
 \hline
 \end{array}$$

Réponse page 20

Tu peux aussi continuer seul... Si tu as des idées propose-les à ton professeur et tes camarades.

**Un curieux système** Réponses

02

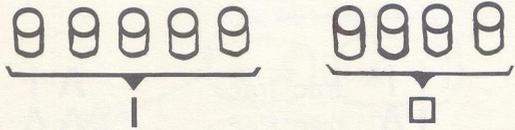
Dans I O

I signifie un groupe de cinq croix  
 O signifie aucun élément restant

Dans I Λ

I signifie un groupe de cinq croix  
 Λ signifie deux éléments non groupés

03



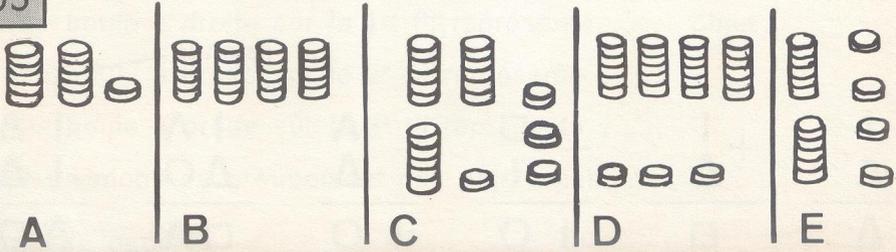
Cardinal : I □  
 trac troc

04

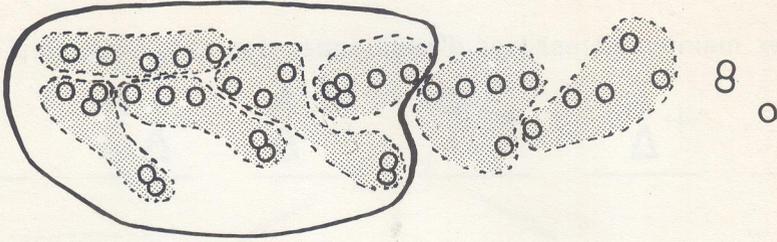
Ensemble des notes : do, ré, mi, fa sol, la, si ➡ Cardinal : I Λ

05

Ensemble des doigts : Cardinal Λ O



06

Cardinal :  $I \Delta \Delta$ 

Card (ensemble des jours du mois de juin) =

 $II O$ 

Card (ensemble des jours du mois de décembre) =

 $III I$ 

Card (ensemble des centimètres du double-décimètre) =

 $\square O$ 

08



Faisons le calcul : Trois groupes de cinq éléments :  $3 \times 5$   
 Un groupe de cinq groupes de cinq :  $1 \times 5 \times 5$

Ce qui fait :  $(1 \times 5 \times 5) + (3 \times 5) + 1 = 41$  dans notre système.

09

$O$	trou	$II$	trac trac	$\Delta I$	trec trac
$I$	trac	$I \Delta$	trac trec	$\Delta \Delta$	trec trec
$\Delta$	trec	$I \square$	trac tric	$\Delta O$	trec tric
$\square$	trac	$I O$	trac troc	$\Delta \square$	trec troc
$I O$	trac trou	$\Delta O$	trec trou	$\Delta O$	tric trou

10

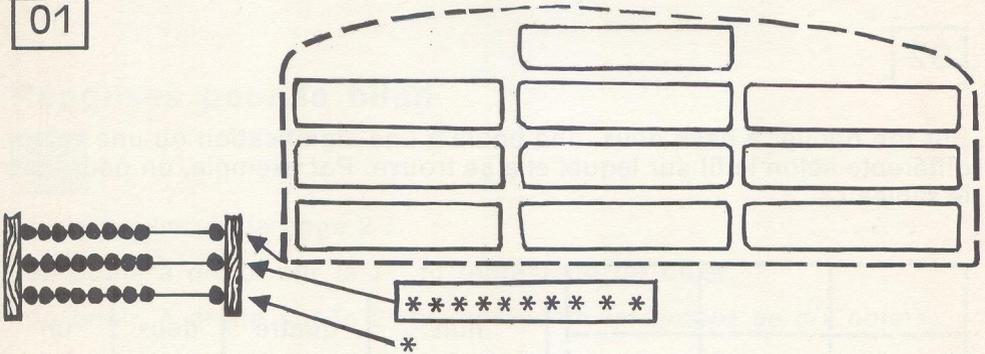
retenue  $\rightarrow$

$$\begin{array}{r}
 + I \\
 \Delta \\
 \hline
 \Delta
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + I \\
 \Delta \\
 \hline
 \square
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \square \\
 I \\
 \hline
 I O
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 + \Delta \\
 \Delta \\
 \hline
 I O
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 I \Delta \\
 \Delta O \\
 \hline
 \square \Delta
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 I \Delta \\
 I \Delta \\
 \hline
 \Delta O
 \end{array}$$

# Faisons un bilan

Quelques idées générales peuvent se dégager de ces trois recherches que tu as connues.

01

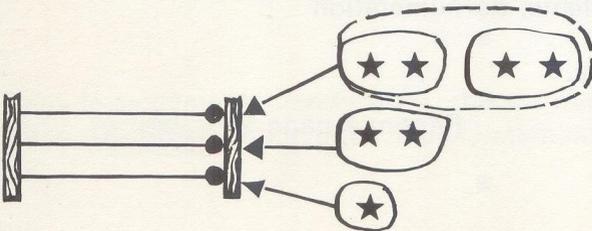


Sur le boulier de la page 2

- une boule à droite sur le 1<sup>er</sup> fil représente ..... objet
- une boule à droite sur le 2<sup>e</sup> fil représente .....
- une boule à droite sur le 3<sup>e</sup> fil représente .....

C'est un mode de groupement des objets par .....

Réponse page 23



Sur le boulier de la page 5

- une boule à droite sur le 1<sup>er</sup> fil représente ..... objet
- une boule à droite sur le 2<sup>e</sup> fil représente .....
- une boule à droite sur le 3<sup>e</sup> fil représente .....

C'est un mode de groupement des objets par .....

Réponse page 23

Dans le système des bandelettes, chacune représente combien de bandelettes immédiatement inférieures ?

Réponse page 23

Dans le système trou, trac, trec... (page 17-06), tu as fait des groupements par .....

Réponse page 23

02

Sur ton boulier à base deux, une boule a une signification ou une valeur différente selon le fil sur lequel elle se trouve. Par exemple, on peut faire le tableau :

	huit	quatre	deux	un
$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2$	2	1	

C'est le tableau de la *numération en base deux*

03

Construis de même les tableaux de numération

- du système à base quatre,
- du système à base cinq,
- du système à base six.

Réponse page 24

04

Voici un nombre : **231**

Considère d'abord qu'il est écrit dans le système à *base quatre*. En utilisant le tableau de valeurs précédent (voir 03), cherche son écriture dans le système à base dix, notre système habituel.

05

Considère maintenant que **231** est écrit dans le système à *base cinq* et cherche de même, avec le tableau de valeurs correspondant, son écriture en base dix.

06

Maintenant, considère que 231 est écrit dans le système à base six et cherche encore son écriture en base dix.

Réponses en couverture III

## Réponses pour le bilan

01

Sur le boulier de la page 2 :

une boule à droite sur le 1<sup>er</sup> fil représente *un* objet,

une boule à droite sur le 2<sup>e</sup> fil représente *un groupe de dix* objets,

une boule à droite sur le 3<sup>e</sup> fil représente un *groupe de dix groupes* d'objets.

C'est un mode de groupement des objets par **dix** .



Sur le boulier de la page 5 :

une boule à droite sur le 1<sup>er</sup> fil représente *un* objet,

une boule à droite sur le 2<sup>e</sup> fil représente un *groupe de deux* objets,

une boule à droite sur le 3<sup>e</sup> fil représente un *groupe de deux groupes* d'objets.

C'est un mode de groupement des objets par **deux** .



Dans le système de bandelettes, chaque bandelette représente ou remplace **quatre** bandelettes immédiatement inférieures.



Dans le système trou, trac, trec... tu as fait des groupements par **cinq** .



Tu as successivement travaillé dans des systèmes de numération

- à base dix ou décimal,
- à base deux ou binaire,
- à base quatre,
- à base cinq.



soixante- quatre	seize	quatre	un
$4 \times 4 \times 4$	$4 \times 4$	4	1

base quatre



cent vingt-cinq	vingt-cinq	cinq	un
$5 \times 5 \times 5$	$5 \times 5$	5	1

base cinq



deux cent seize	trente-six	six	un
$6 \times 6 \times 6$	$6 \times 6$	6	1

base six

04

soixante- quatre	seize	quatre	un
$4 \times 4 \times 4$	$4 \times 4$	4	1
	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>1</b>

Calcul :

$$2 \times 4 \times 4 + 3 \times 4 + 1 = 45 \text{ (quarante-cinq).}$$

•

05

Calcul :

$$2 \times 5 \times 5 + 3 \times 5 + 1 = 66 \text{ (soixante-six).}$$

•

06

Calcul :

$$2 \times 6 \times 6 + 3 \times 6 + 1 = 91 \text{ (quatre-vingt onze).}$$

•

**As-tu compris que les chiffres n'ont pas la « même valeur » selon la base et selon la place qu'ils occupent dans l'écriture d'un nombre ?**